Ensembles

I. Généralités

Appartenance

Un **ensemble** est correctement défini lorsqu'on sait exactement quels **éléments** lui **appartiennent**. Deux ensembles sont égaux si, et seulement s'ils contiennent les mêmes éléments. (Ici, « *E contient a* » signifie que l'élément a appartient à l'ensemble E).

Exemples

Une droite, un cercle, plus généralement une figure, sont des *ensembles* de points. On peut tout aussi bien créer des ensembles dont les éléments soient des nombres. Plus généralement, tout objet mathématique peut se retrouver élément d'un ensemble, même un autre ensemble.

Notation

$a \in E$ « a appartient à E » (ou parfois « a appartenant à E »).

$a \notin E$ « a n'appartient pas à E. »

À gauche du signe « $\in$ », il y a un *élément* et à droite un *ensemble*.

Déterminations

On peut exprimer un ensemble :

En extension : en écrivant la liste de tous les éléments qui lui appartiennent (l'ordre dans lequel ils apparaissent n'a aucune

importance). On encadre la liste d'*accolades* et l'on sépare les éléments par des points-virgules. Exemple : $E=\{0;2;4;6;8\}$

En compréhension : par une affirmation mathématique permettant de savoir exactement quels éléments appartiennent à l'ensemble. Exemple : l'ensemble E de l'exemple précédent pourrait se décrire ainsi : « soit E l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs à 9 ».

Cardinal

Un ensemble **fini** est un ensemble qui *contient* un nombre fini d'éléments. Le nombre des éléments se nomme le **cardinal** de l'ensemble. On le note « $\operatorname{Card}(E)$ » (et on lit : « cardinal de E »). Exemple : $\operatorname{Card}\left(\left\{8;0;\frac{1}{7}\right\}\right)=3$.

Il existe un ensemble à *zéro* éléments, il se nomme l'**ensemble vide** et on le note : $\varnothing$. Un ensemble à 1 élément se nomme un **singleton**. Un ensemble à 2 éléments se nomme une **paire**. A ma connaissance, un ensemble à trois éléments n'a pas de nom. Je propose le mot « **triade** ».

Paire/Couple

Une *paire* étant un ensemble, l'ordre dans lequel on écrit ses éléments n'a aucune importance : $\{a;b\}=\{b;a\}$. De plus, un même élément ne peut appartenir plusieurs fois à une paire (il appartient ou n'appartient pas, c'est tout).

Il existe un concept ressemblant mais bien distinct, le **couple**, qui n'est pas un ensemble, mais que nous étudions ici par commodité. Dans un *couple*, comme dans un paire, il y a deux « éléments », que nous nommerons plutôt **termes** pour bien faire la distinction. Mais contrairement aux ensembles, l'ordre a une importance et la répétition est autorisée. Pour noter un couple, on utilise des parenthèses à la place des accolades.

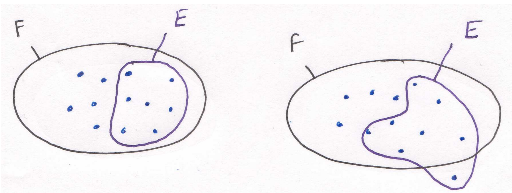
	Paire	Couple
Notation	$\{a;b\}$	$(a;b)$
Ordre	$\{a;b\}=\{b;a\}$	$(a;b)\neq(b;a)$
Répétition	$\{a;a\}$ n'existe pas	$(a;a)$ existe

Le concept correspondant au couple, mais avec trois *termes* se nomme un **triplet**. Par exemple $(5;2;3)$. (Puis quadruplet, quintuplet… On parle d'une façon générale de « n-uplets »)

II. La relation d'inclusion

Définition

Un ensemble E est **inclus** dans un ensemble F si et seulement si tout élément de E appartient aussi à F. On dit aussi que : E est une **partie** de F ou encore que E est un **sous-ensemble** de F



E est inclus dans F E n'est pas inclus dans F

Remarques

Tout ensemble est inclus dans lui-même.

L'ensemble vide est *inclus* dans tous les ensembles.

Un ensemble est toujours inclus dans lui-même.

Notation $E\subset F$ « E est inclus dans F »

Ensemble des parties

L'**ensemble des parties** d'un ensemble E se note $\mathcal{P}(E)$ et se lit « $\mathcal{P}$ de E ». C'est l'ensemble de tous les sous-ensembles de E.

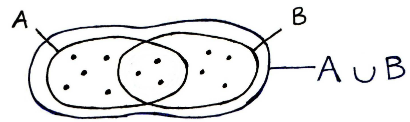
Exemple :

si $E=\{a;b\}$, alors : $\mathcal{P}(E)=\{\ \varnothing\ ;\ \{a\}\ ;\ \{b\}\ ;\ \{a;b\}\ \}$

III. Opérations sur les ensembles

Soient A et B deux ensembles.

Réunion On note $A\cup B$ (« A **union** B ») l'ensemble *contenant* (au sens de l'appartenance) tous les éléments de A et aussi tous les éléments de B.



Pour tout x, $\boxed{x\in A\cup B \iff (x\in A \text{ ou } x\in B)}$

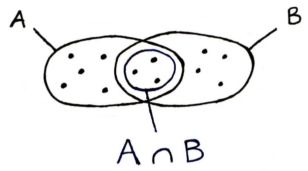
$\Leftrightarrow$: « équivaut à ». A le même sens qu'un « si, et *seulement* si ».

Le *ou* mathématique est « *non exclusif* » : c'est un « *ou* ou *et* ».

Exemple Si $A=\{a;b;c\}$ et si $B=\{b;c;d\}$, alors $A\cup B=\{a;b;c;d\}$

INTERSECTION

On note $A \cap B$ (« A **inter** B ») l'ensemble contenant les éléments étant chacun présent à la fois dans A et dans B. Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont **disjoints**.



Pour tout x, $\boxed{x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)}$

EXEMPLE Si $A = \{a;b;c\}$ et si $B = \{b;c;d\}$, alors $A \cap B = \{b;c\}$

DIFFÉRENCE

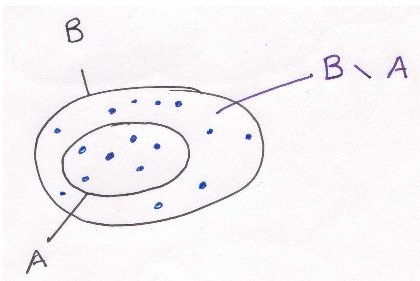
Si $A \subset B$, on définit la **différence** ensembliste $B \setminus A$ (« B <u>privé de</u> A ») par l'affirmation :

Pour tout x, $x \in B \setminus A \Leftrightarrow (x \in B \text{ et } x \notin A)$

On part donc de l'ensemble B et on lui retire tous les éléments qui appartiennent à A.

$B \setminus A$ se nomme aussi le **complémentaire** de A dans B.

S'il est clair qu'un ensemble E est l'ensemble de référence dans lequel on se place d'office, le complémentaire de A (dans E) peut se noter $\overline{A}$.



EXEMPLE si $B = \{a;b;c;d;e\}$ et $A = \{a;c;e\}$, alors $B \setminus A = \{b;d\}$.

PRODUIT CARTÉSIEN

Soient E et F deux ensembles. $E \times F$ (« E <u>croix</u> F ») est l'ensemble de tous les <u>couples</u> dont le premier terme appartient à E et le second à F.

EXEMPLE si $E = \{a\}$ et $F = \{j;k\}$, alors $E \times F = \{(a;j);(a;k)\}$

E^2 est une façon d'écrire $E \times E$. C'est l'ensemble de tous les couples dont les termes appartiennent à E.

Sur le même principe, E^3 est l'ensemble des triplets dont les termes appartiennent tous à E. Etc.

IV. LES ENSEMBLES DE NOMBRES

1. LES GRANDES CATÉGORIES DE NOMBRES

$\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels**.

$\mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;........\}$

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs**.

$\mathbb{Z} = \{........;-3;-2;-1;0;1;2;3;........\}$

$\mathbb{D}$

$\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres **décimaux**.

Un nombre décimal est un nombre dont l'écriture décimale est finie.

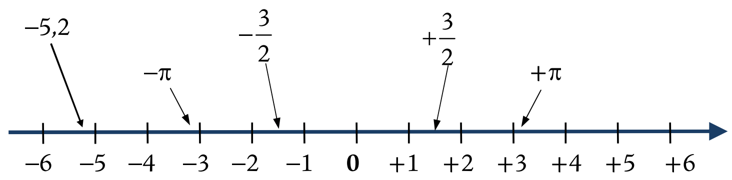
Exemples : $145 \in \mathbb{D}$ $\quad 1,111\overline{1}... \notin \mathbb{D}$

$\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres **rationnels**.

Un nombre rationnel est un nombre qu'on peut écrire sous forme de fraction (éventuellement précédée d'un « – ») ; autrement dit comme **q**uotient de deux entiers (relatifs).

$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres **réels**. (Ou : ensemble des réels)



Les *réels* sont tous les nombres qui peuvent être représentés sur un *axe*.

REMARQUE Vous devez à présent pouvoir justifier précisément la suite d'inclusions suivante : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

2. L'IRRATIONALITÉ

DÉFINITION Un réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**.

Donc l'ensemble des nombres irrationnels peut s'écrire $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

EXEMPLES $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

π aussi est un nombre irrationnel.

THÉORÈME Un nombre est rationnel <u>ssi</u> son écriture décimale est finie ou *périodique*.

REMARQUES

« <u>ssi</u> » est une abréviation de « si**,** et *seulement* si ».

« périodique » signifie qu'une succession de chiffre se répète à l'infini.

Par exemple : $8{,}976\ 120\ 120\ \overline{120}...$

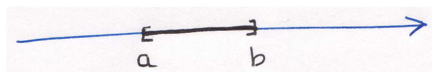
3. LES INTERVALLES

PRÉSENTATION

Un intervalle est ce qui est compris entre deux *bornes*. Dans un sens plus large, en mathématiques, les **intervalles** sont les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui se représentent d'un seul tenant (on dit qu'ils sont *connexes*) sur *l'axe des réels*. On les note à l'aide de crochets, par analogie avec les segments. On « ouvre » un crochet (on le « tourne vers l'extérieur ») pour dire que la *borne* n'est pas comprise dans l'ensemble.

Il y a 9 sortes d'intervalles. Soient a et b deux réels, avec $a \leq b$.

$[a;b]$ L'intervalle $[a;b]$ est <u>l'ensemble de tous les réels compris entre</u> a et b (a et b inclus). Il contient donc une <u>infinité</u> d'éléments (sauf si $a = b$), contrairement à la paire $\{a;b\}$ qui n'en contient que deux. C'est un intervalle dit **fermé**. Sur l'axe des réels, il est représenté par un segment :



Pour tout réel x : $x \in [a;b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$

$[a;b[$ $x \in [a;b[\Leftrightarrow a \leq x < b$

$]a;b]$ $x \in]a;b] \Leftrightarrow a < x \leq b$

(ces deux intervalles : intervalles **semi-ouverts**)

$]a;b[$ $x \in]a;b[\Leftrightarrow a < x < b$ intervalle **ouvert**

On considère encore comme des intervalles, les sous-ensembles *connexes* de qui se prolonge à l'infini :

$[a;+\infty[$	$x \in [a;+\infty[\;\Leftrightarrow\; a \leq x$	
$]a;+\infty[$	$x \in]a;+\infty[\;\Leftrightarrow\; a < x$	
$]-\infty;b]$	$x \in]-\infty;b] \;\Leftrightarrow\; x \leq b$	
$]-\infty;b[$	$x \in]-\infty;b[\;\Leftrightarrow\; x < b$	
$]-\infty;+\infty[$	$]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$	

Dans ces expressions, les signes « $-\infty$ » et « $+\infty$ » sont juste des notations faisant partie d'un tout, mais ne représentant en eux-mêmes aucun objet mathématique.

REMARQUE Les *singletons* sont des *intervalles* : $\{a\} = [a;a]$

L'*ensemble vide* est un *intervalle* : $\varnothing =]a;a[$

a et b sont appelées les **bornes** des intervalles.

NOTATIONS

$\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[\qquad \mathbb{R}_- =]-\infty;0]$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ($\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.)

$\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[\qquad \mathbb{R}_-^* =]-\infty;0[$

Prononciation : « R plus », « R étoile », « R plus étoile », etc.